Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении

И. К. Белкин, *Квант*[1], 1983, № 10, 32–33.

В учебнике «Физика 8» выражение

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

для перемещения тела (материальной точки) при прямолинейном равноускоренном движении выводится из графика зависимости скорости тела от времени. Но то же выражение можно получить и прямым вычислением. Покажем это.

Пусть точка движется вдоль прямой с ускорением a в течение времени t, начиная с некоторого начального момента $t = 0$, когда скорость (начальная скорость) была равна v_0. Разделим мысленно все время движения на одинаковые малые промежутки времени Δt, настолько малые, что скорость в течение времени Δt можно считать постоянной. Однако будем считать, что к концу каждого такого промежутка скорость как бы скачком возрастает на величину $a\Delta t$ (движение ведь ускоренное).

За первый промежуток времени Δt перемещение Δs_1 равно $v_0\Delta t$. Во второй временной промежуток скорость точки равна $v_0 + a\Delta t$, а перемещение Δs_2 равно $(v_0 + a\Delta t)\Delta t = v_0\Delta t + a(\Delta t)^2$, в третий оно равно $(v_0 + 2a\Delta t)\Delta t = v_0\Delta t + 2a(\Delta t)^2$ и т. д. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\Delta s_1 = v_0\Delta t,\\
&\Delta s_2 = v_0\Delta t + a(\Delta t)^2,\\
&\Delta s_3 = v_0\Delta t + 2a(\Delta t)^2,\\
&\Delta s_4 = v_0\Delta t + 3a(\Delta t)^2,\\
&\ldots\\
&\Delta s_n = v_0\Delta t + (n-1)a(\Delta t)^2,
\end{aligned}$$

где n — число промежутков, на которые мы разделили время движения t. Так как промежутки Δt малы, n велико, поэтому в правой части последнего равенства можно пренебречь единицей по сравнению с n и считать, что

$$\Delta s_n = v_0\Delta t + na(\Delta t)^2.$$

Общее перемещение s равно сумме всех малых перемещений Δs_i:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_n,$$

или

$$s = nv_0\Delta t + a\Delta t^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

Как известно, сумма последовательных натуральных чисел равна полусумме крайних слагаемых, умноженной на их число $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2}n$. Пренебрегая единицей по сравнению с n, получаем

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2}.$$

Отсюда

$$s = v_0 n\Delta t + \frac{a(n\Delta t)^2}{2}.$$

Но $n\Delta t = t$, а $(n\Delta t)^2 = t^2$, тогда окончательно

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

[1] «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.