Как решается основная задача механики?

И. К. Белкин, *Квант*[1], 1984, № 2, 24–25.

Основная задача механики, как часто указывается в учебнике «Физика 8», — определять положение (координаты) движущегося тела в любой момент времени. Это механика обязательно должна «уметь», иначе она не может быть наукой о движении. Законы движения, открытые Ньютоном, и прежде всего второй закон Ньютона (основной закон динамики) $\vec{F} = m\vec{a}$ как раз и позволяют решать эту задачу.

Второй закон Ньютона связывает силу, приложенную к телу, и вызванное силой ускорение. Но ускорение — это быстрота изменения скорости, а скорость, в свою очередь, — быстрота изменения перемещения тела. Поэтому, решив уравнение, выражающее основной закон динамики, мы узнаем о быстроте изменения координат тела, а значит, и о самих координатах в любой момент времени. Для этого кроме силы нужно знать еще начальные условия — начальные координаты и начальную скорость тела.

На первый взгляд может казаться, что уравнение второго закона Ньютона очень простое и что решается оно тоже просто. Однако надо помнить, что уравнение $\vec{F} = m\vec{a}$ — векторное. Это означает, что за ним «скрываются» три скалярных уравнения для проекции силы и ускорения на оси координат:

$$F_x = ma_x,$$
$$F_y = ma_y,$$
$$F_z = ma_z.$$

Эти уравнения в самом деле решаются легко, но только в том случае, когда проекции силы F_x, F_y и F_z постоянны, то есть когда их значения одинаковы при любых значениях координат точки, а значит, и в любой момент времени. Тогда постоянны и значения проекций ускорения a_x, a_y и a_z, движение тела, следовательно, равноускоренное, и координаты x, y и z определяются равенствами

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$
$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Здесь x_0, y_0 и z_0 — начальные координаты, а v_{0x}, v_{0y} и v_{0z} — соответствующие проекции начальной скорости на оси координат.

В школьном курсе физики рассматриваются только такие задачи, когда силы постоянны. Значительно сложнее решать основную задачу механики, если сила и ее проекции зависят от координат. В действительности обычно именно так и бывает. Как решается задача в таком случае? Конечно, и теперь нужно знать начальные условия и силу. Но теперь «знать силу» — значит знать, как она изменяется при изменении координат тела.

Пусть, например, на тело действует сила F_x, которая определенным (и известным) образом зависит от координаты x. Для определения координаты x тела в любой момент времени прежние формулы непригодны, потому что если сила F_x изменяется от точки к точке, будет изменяться и ускорение a_x тела. Будем решать задачу постепенно, так сказать, шаг за шагом.

Сначала рассмотрим движение нашего тела в течение малого промежутка времени Δt, начиная с момента, который мы условимся считать началь-

[1] «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.

ным. В этот момент ($t = 0$) координата x тела, равна x_0 (начальная координата), а скорость равна v_0x (начальная скорость). Промежуток Δt выберем настолько малым, чтобы в течение этого времени силу F_x, а значит, и ускорение a_x можно было считать постоянными. Силу F_{0x} мы знаем, поскольку нам известно, как сила зависит от координаты; a_{0x} мы тоже знаем, так как $a_{0x} = \dfrac{F_{0x}}{m}$. Следовательно, по известным нам формулам равноускоренного движения для скорости v_{1x} и координаты x, в конце промежутка времени Δt мы можем написать:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}\Delta t,$$

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t + \frac{a_{0x}\Delta t^2}{2}.$$

Затем рассмотрим движение тела в следующий столь же малый промежуток времени Δt. Начальной координатой теперь будет найденное нами значение x_1 и начальной скоростью — значение v_{1x}. В течение этого второго промежутка на тело будет действовать уже другая сила — F_{1x}. Ее значение мы найдем, зная зависимость силы от координаты. Соответственно другим будет и ускорение тела a_{1x}. Таким образом, к концу второго промежутка времени скорость тела будет равна

$$v_{2x} = v_{1x} + a_{1x}\Delta t,$$

а координата —

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\Delta t + \frac{a_{1x}\Delta t^2}{2}.$$

Эти значения скорости и координаты будут начальными для движения тела в течение следующего, третьего, промежутка, и мы таким же способом найдем значения скорости и координаты к концу этого промежутка. Так, «двигаясь» шаг за шагом, мы сможем определить координату x тела в любой момент времени. Аналогично можно найти и координаты y и z.

В рассмотренной теперь нами процедуре нетрудно заметить систематическую ошибку, которую мы допускаем. Состоит она в том, что сила и ускорение считаются постоянными в течение каждого малого промежутка времени Δt, а в конце промежутка они скачком изменяются. Между тем в действительности и сила, и ускорение всегда изменяются непрерывно. Уменьшить эту ошибку можно, уменьшив значение Δt. Ошибка практически вовсе исчезнет, если промежутки времени сделать бесконечно малыми. Но тогда число наших «шагов» станет бесконечно большим, и процедура из-за этого сделается невозможной.

Специально для таких случаев разработан особый математический аппарат, называемый дифференциальным и интегральным исчислением (Ньютон придумал его именно для этой цели). С его помощью и решается основная задача механики. Но принцип решения именно тот, который мы здесь рассмотрели. Именно таким способом рассчитывают сложные механические движения (например, спутников и ракет) современные ЭВМ.

В заключение отметим следующее. Когда мы говорим, что основная задача механики — находить координаты движущихся тел по известным силам и начальным условиям, то это вовсе не значит, что только этим и занимается механика. Бывает и так, что движение тела, то есть его положение в любой момент времени, известно из наблюдений. Тогда законы движения позволяют найти силу, действующую на тело. Эта задача, так называемая обратная задача механики, столь же важна, как и рассмотренная нами прямая задача, но, как нетрудно понять, она значительно проще.