Вокруг одной задачи

В. А. Бодик, *Квант*[1], 1987, №9, 40–41.

На одном из занятий кружка по решению задач наш учитель предложил такую задачу:

За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит 5 см и останавливается. Какой путь тело прошло за третью секунду?

Никто из нас не смог к ней подступиться. Тогда учитель сказал: «Сегодняшнее занятие кружка мы посвятим решению этой задачи, хотя она решается... устно. Для этого лишь нужно знать... Впрочем, решите сначала другую задачу». Вот ее условие:

За последние полсекунды свободно падающее тело проходит путь, равный 30 м. Найдите скорость тела в момент приземления.

Эту задачу мы решили легко:

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \; v_t = v_0 + gt,$$

откуда

$$v_t = \frac{s + gt^2/2}{t} = \frac{30 \text{ м} + (10 \text{ м/с}^2)(0{,}5 \text{ с})^2/2}{0{,}5 \text{ с}} = 62{,}5 \text{ м/с},$$

но связи с предыдущей задачей не обнаружили. Но как только учитель записал конечную формулу иначе:

$$s = v_t t - \frac{gt^2}{2},$$

мы сразу увидели обратимость движения. (Это как в кино, когда снятый эпизод прокручивают в обратном порядке.)

Теперь нашу задачу можно сформулировать так:

За первую секунду равноускоренного движения без начальной скорости тело проходит 5 см. Найдите путь за третью секунду.

Мы быстро нашли несколько путей решения. Учитель же остановился на одном из них, в котором было получено выражение для пути, пройденного за любую секунду:

$$s_n = (2n-1)\frac{a\tau^2}{2},$$

где $\tau = 1$ с, n — номер секунды. Обратив наше внимание на множитель $(2n-1)$ — рекуррентную формулу нечетного числа, учитель записал:

$$s_1 : s_2 : \ldots : s_n = 1 : 3 : \ldots : (2n-1).$$

И тогда всем стало ясно, что нашу задачу действительно можно было решить устно:

$$s_3 = 5 s_1 = 25 \text{ см}.$$

[1] «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.