Равномерное движение

М. И. Башмаков,
Квант[1], 1983, № 3, 26–30.

Мы здесь рассматриваем *прямолинейное равномерное движение*, то есть движение по фиксированной прямой с постоянной скоростью. Выбрав направление на этой прямой, можно записать уравнение движения в виде

$$s = vt, \tag{1}$$

где t — время движения, s и v — проекции векторов перемещения и скорости на выбранную ось. Тогда s и v могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Средняя скорость

Формулу (1) часто записывают в виде $v = s/t$. Соотношение $v = s/t$ имеет смысл и для неравномерного движения (движения с переменной скоростью), но в этом случае v является по определению *средней скоростью* движения.

В качестве разминки, постарайтесь, не составляя уравнений, ответить на следующие вопросы:

1. *Одна машина шла первую половину пути со скоростью 30 км/час, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина шла весь путь со скоростью 40 км/ч. Какая из этих машин затратила на всю дорогу меньше времени?*

2. *Одна машина первую половину времени движения шла со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина двигалась столько же времени, сколько и первая, причем ее скорость была все время 40 км/ч. Какая из машин прошла большее расстояние?*

(Ответы указаны в подписях к рисунку 1).

Возможные ошибки при ответах на вопросы о равномерном движении связаны с тем, что мы иногда путаем характер зависимости между двумя из величин s, v и t при фиксированной третьей.

При фиксированном п е р е м е щ е н и и зависимость между временем и скоростью — обратно пропорциональная. При этом, если перемещение $2s > 0$ состоит из двух одинаковых участков s, которые проходятся с постоянными (но разными) скоростями, первый за время t_1, второй за время t_2, то средняя скорость $v = 2s/(t_1 + t_2)$ меньше среднего арифметического скоростей на каждом из участков, равного

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}\right) = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}.$$

(Действительно, разность

$$\frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} - \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{s(t_1 - t_2)^2}{2t_1t_2(t_1 + t_2)}$$

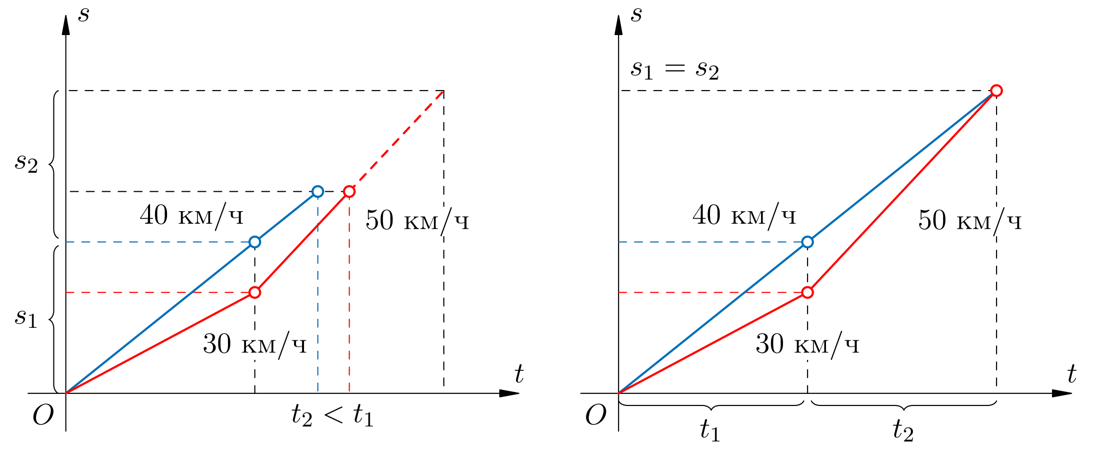
очевидно, положительна, то есть $v < \frac{v_1 + v_2}{2}$).

Так, в задаче 1 средняя скорость первой машины меньше, чем $(30 + 50)/2$ км/ч $= 40$ км/ч, значит вторая машина (двигавшаяся со скоростью 40 км/ч) приедет быстрее.

При зафиксированном в р е м е н и движения зависимость между перемещением и скоростью — прямо пропорциональная. Поэтому если в течение двух одинаковых отрезков времени t происходит равномерное движение с разными скоростями v_1 и v_2, то средняя скорость v на всем пути будет р а в н а среднему арифметическому скоростей на отдельных участках. (Действительно,

$$v = \frac{s_1 + s_2}{2t} = \frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t}\right) = \frac{v_1 + v_2}{2}).$$

[1] «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.



а) При $s_1 = s_2$ вторая машина затратила меньше времени.

б) При $t_1 = t_2$ обе машины прошли одинаковое расстояние.

Рис. 1.

Так, в задаче 2 средняя скорость первой машины равна скорости второй $\big((50+30)/2 = 40\big)$ и поэтому они за одинаковое время совершают одинаковое перемещение.

Полезно изображать движение графически, рассматривая перемещение как функцию от времени: $s = s(t)$. Для первых двух задач это сделано на рисунке 1, а, б.

В заключении этого раздела решите самостоятельно следующую задачу:

3. *Пусть s_i, t_i — положительные числа ($i = 1, 2, \ldots, n$). Докажите, что дробь*

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$$

лежит между наименьшей и наибольшей из дробей

$$\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \ldots, \frac{s_n}{t_n}.$$

Сформулируйте результат в терминах средних скоростей.

Относительное движение

К совсем простым задачам, часто неверно решаемым, относится задача

4. *Когда катер тратит на движение туда и обратно на данное расстояние меньше времени — при движении по реке (с постоянной скоростью течения) или в стоячей воде?*

Кажется очевидным, что время будет одинаковым — ведь при движении по реке туда и обратно скорость течения в одну сторону прибавляется к скорости катера, а в другую — вычитается, так что изменения в скорости компенсируют друг друга. Однако это не так. На самом деле катер обернется быстрее в стоячей воде!

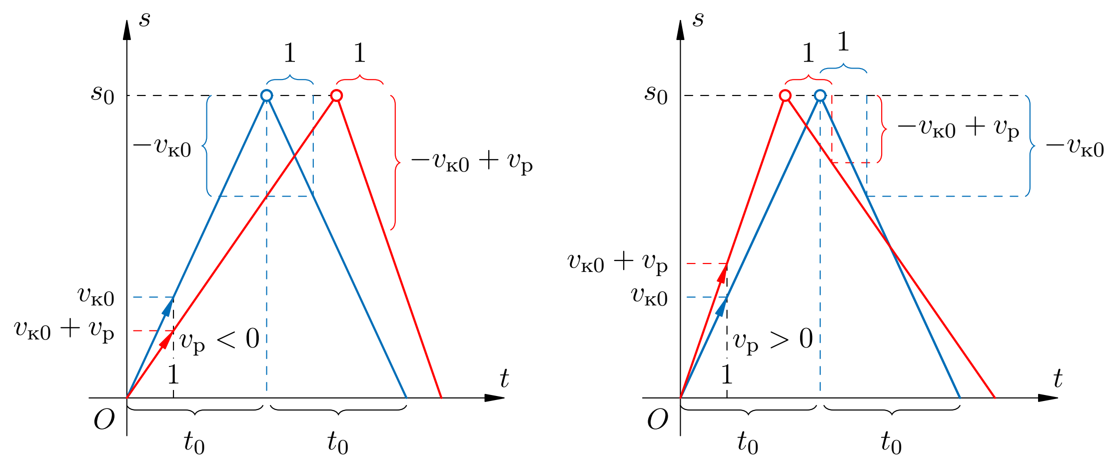
Графики движения катера показаны на рисунке 2.

Даже если вы правильно угадали ответ, очень советую аккуратно обосновать его; кроме формулы (1), вам потребуется обычная формула сложения скоростей:

$$v_\text{к} = v_{\text{к}0} + v_\text{р},$$

утверждающая, что скорость $v_\text{к}$ катера в реке равна сумме его скорости в стоячей воде $v_{\text{к}0}$ и скорости реки $v_\text{р}$.

В задаче с катером мы столкнулись с наложением двух равномерных движений — движения катера и движения воды в реке. С такой ситуацией связано много интересных и неожиданных



а) Катер сначала идет против течения. *б) Катер сначала идет по течению.*

Рис. 2.

задач. Попробуйте без вычислений решить такую задачу:

5. *По движущемуся вверх эскалатору в направлении движения идет человек и считает пройденные ступени. Скорость человека относительно неподвижного эскалатора равна v. Как будет выглядеть график зависимости числа s пройденных им ступеней от скорости v?*

Прежде чем рисовать график, ответьте для себя на вопрос: возрастает или убывает функция с ростом скорости v? Грубый эскиз графика изображен на рисунке 3, а.

Давайте изучим ситуацию более подробно. Обозначим общее число ступеней (неподвижного) эскалатора через s_0, скорость движения эскалатора через $v_э$, скорость подъема человека через v, число ступеней, пройденных человеком, через s. Эти величины связаны соотношением

$$\frac{s}{v}=\frac{s_0-s}{v_э}$$

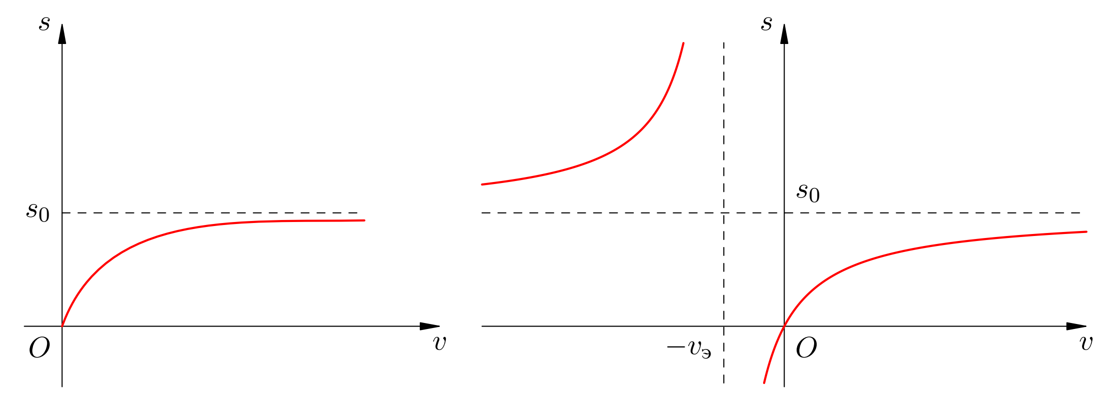
(мы приравняли время подъема человека и время подъема эскалатора).

Отсюда находим

$$s=\frac{s_0v}{v+v_э}=\frac{s_0+s_0v_э-s_0v_э}{v+v_g}=s_0-\frac{s_0v_э}{v+v_э}.$$

Начертим график функции

$$s=s_0-\frac{s_0v_э}{v+v_э}, \qquad (2)$$



а) *б)*

Рис. 3.

считая, что v может принимать любые (в том числе и отрицательные) значения (см. график на рисунке 3, б).

Глядя на этот график (и вспоминая условия задачи), ответьте на следующие вопросы:

а) Что происходит с s при неограниченно возрастающем v?

б) Какой смысл имеют отрицательные значения v?

в) Как же можно объяснить, что s неограниченно возрастает, если v приближается к $(-v_э)$? Представьте себе, что вы встали на первую ступеньку движущегося вверх эскалатора и начали спускаться вниз с той же скоростью, что и сам эскалатор. Далеко ли вы уйдете? А сколько ступеней вы можете пройти?

г) Как изменяется график функции (2), если одновременно заменить v на kv и $v_э$ на $kv_э$?

Ответ на последний вопрос — график не изменяется — означает, что число пройденных ступенек зависит только от о т н о ш е н и я скоростей человека и эскалатора.

В заключении этого раздела предлагаем еще две задачи.

6. *Человек, поднимаясь по эскалатору, насчитал 100 ступеней, а двигаясь с вдвое большей скоростью, насчитал 120 ступеней. Сколько ступеней на неподвижном эскалаторе?*

7. *Человек, идущий строго вдоль трамвайных путей, каждые 7 минут видит обгоняющий его трамвай, а каждые 5 минут — трамвай, проходящий ему навстречу. Как часто ходят эти трамваи?*

Кусочно-линейное движение

Простота формулы $s = vt$ обусловлена тем, что за начало отсчета выбрана точка на прямой, в которой находится движущееся тело в момент времени

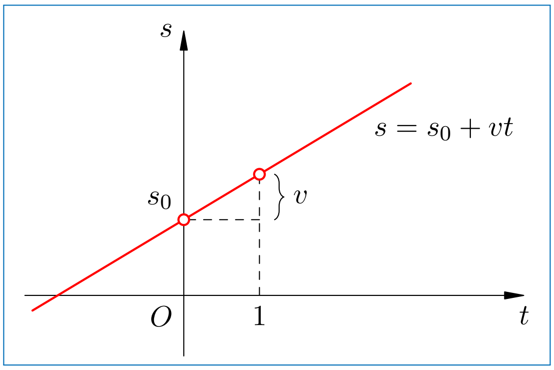


Рис. 4.

$t = 0$. Если сдвинуть начало отсчета на s_0 (влево или вправо, в зависимости от знака), уравнение равномерного движения примет вид

$$s = s_0 + vt. \tag{3}$$

На графике (рис. 4) движение изображается прямой (пересекающей ось s в точке s_0) наклон которой зависит от скорости v. Положительный наклон (острый угол) соответствует положительным скоростям (то есть движению в положительном направлении оси s), отрицательный — движению в обратном направлении.

Формула (3) оказывается полезной тогда, когда мы на единой диаграмме изображаем *кусочно-линейное* движение — то есть движение, являющееся равномерным (но с разными скоростями) на соседних отрезках времени. На $s(t)$-диаграмме такое движение изображается в виде ломанной линии, при этом каждое звено этой линии задается функцией вида (3) в пределах соответствующего отрезка времени (рис. 5, а). Если изобразить с к о р о с т ь такого движения как функцию времени $v = v(t)$, то получим *кусочно-постоянную* (или ступенчатую) функцию (рис. 5, б). Связь между графиками кусочно-постоянной функции скорости и кусочно-линейной функции пути хорошо видна на рисунке 5.

Теперь воспользуемся этими соображениями, чтобы решить более труд-

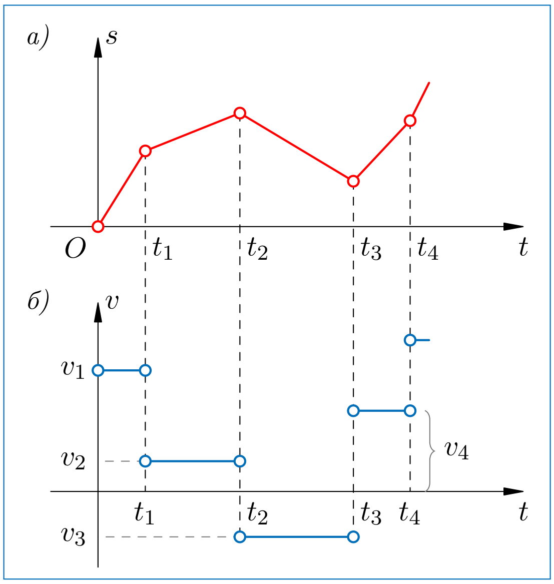


Рис. 5.

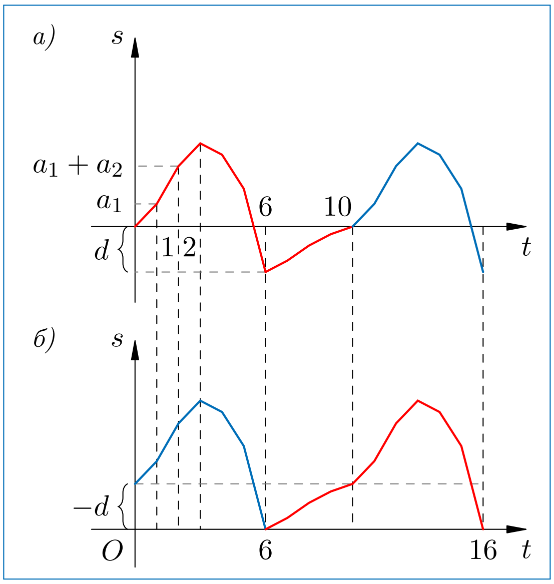


Рис. 6.

ную (олимпиадную) задачу, на первый взгляд не имеющую отношения к равномерному движению.

8. *По кругу выписано 10 чисел, сумма которых равна нулю. Мы начинаем с одного из них, например, a_1, и последовательно складываем их по кругу (скажем, по часовой стрелке). Получим суммы a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 0$. Докажите, что можно так выбрать начальное число, что все эти суммы будут неотрицательны.*

Для решения этой задачи представим себе, что $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — скорости движения на десяти равных отрезках времени, которые примем за единицу.

Считая, что в начальный момент путь равен нулю, получим, что путь s через единицу времени будет равен a_1, через две единицы — $a_1 + a_2$, и т. д. График такой функции изобразится ломаной, начинающейся и кончающейся на оси t, так как по условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 0$ (рис. 6, а). Можно считать, что движение повторяется периодически — через десять единиц времени скорость снова равна a_1 и т. д. График движения представится в виде периодически повторяющейся 10-звенной ломаной (рис. 6, а). Начало отсчета в другой точке означает перенос начала координат в одну из вершин ломаной. Что означает неотрицательность сумм? Она означает, что все вершины ломаной лежат выше оси времени (или на ней). Сначала мы выбрали начальную точку произвольно (рис. 6, а). Теперь ясно, что если перенести начало координат в вершину ломаной, для которой значение наименьшее, и начать отсчет от этой точки, то последовательные суммы будут неотрицательны (рис. 6, б).

9. *На кольцевой дороге расположено 10 пунктов, в каждом иэ которых шофер может получить 20 литров бензина. На все кольцо ему нужно все 200 литров. Доказать, что он может так выбрать начальный пункт движения, что забирая по пути бензин, он сможет проехать все кольцо. Ограничений на объем бензобака нет.*

10*. *Пусть несколько человек наблюдало за одной неравномерно ползущей улиткой. Каждый наблюдатель следил за улиткой одну минуту и отметил, что средняя скорость улитки на наблюдаемом участке равна 1 см/мин. Улитка ползла 6 минут и при этом в каждый момент времени за ней кто-нибудь наблюдал. Какое наи-*

меньшее и какое наибольшее расстояние могла проползти улитка?

У к а з а н и е. Легко сообразить, что если улитка ползет равномерно, то за 6 минут она проползет 6 см. Попробуйте сначала заставить двигаться улитку и так организовать наблюдение за ней, чтобы она проползла при соблюдении условий задачи больше 6 см и меньше 6 см. «Сдвинувшись» с 6 см, вам проще будет получить правильный ответ к этой задаче.