Приближенные вычисления при решении задач по физике

Н. Ростовцев, *Квант*[1], 1981, № 4, 40–42.

Приступая к решению какой-либо физической задачи, прежде всего надо выяснить, какие явления или процессы играют существенную роль, а какие — несущественную. Пренебрежение несущественными явлениями будет неминуемо приводить к пренебрежению относительно малыми величинами, то есть к приближенным вычислениям. Знание формул для приближенных вычислений и умение ими пользоваться часто очень упрощают расчеты.

Из курса математики известно, что выражение $(1+x)^n$ при $|x|<1$ можно представить в виде

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots \quad (1)$$

Здесь n — любое действительное число. При натуральном n эта сумма обрывается на члене n-й степени; полученная формула называется формулой Ньютона.

Пусть имеется выражение $(a+b)^n$, тогда из (1)

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\dots\right).$$

Если $|b| \ll |a|$, слагаемыми, содержащими отношение b/a во второй степени и выше, можно пренебречь и ограничиться только первыми двумя слагаемыми:

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \approx a^n\left(1+n\frac{b}{a}\right). \quad (2)$$

Какая ошибка возникает при использовании этой приближенной формулы? Для оценки вполне можно считать, что ошибка равна третьему слагаемому в разложении:

$$\Delta y = a^n \cdot \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (3)$$

При решении физических задач часто вполне допустимы расчеты с точностью до одного процента. Из выражения (3) можно найти максимальное значение величины b/a, при котором точность расчета не выходит за допустимые рамки.

Очень просты и удобны формулы для приближенного вычисления значений тригонометрических функций. Если угол α, выраженный в радианах, достаточно мал, можно принят

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad (4)$$
$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \quad (5)$$
$$\cos\alpha \approx 1. \quad (6)$$

Расчеты показывают, что ошибка не будет превышать одного процента, если угол α удовлетворяет условиям

$$a \leqslant 23^\circ \approx 4{,}0\cdot 10^{-1} \text{ рад для } \sin\alpha,$$
$$a \leqslant 18^\circ \approx 3{,}1\cdot 10^{-1} \text{ рад для } \operatorname{tg}\alpha,$$
$$a \leqslant 8^\circ \approx 1{,}4\cdot 10^{-1} \text{ рад для } \cos\alpha.$$

(Это можно проверить, воспользовавшись, например, таблицами Брадиса.)

В физике довольно часто встречается показательная функция $y = a^x$. При малых значениях x выполняется приближенное равенство

$$a^x \approx 1 + \frac{\lg a}{0{,}43}x. \quad (7)$$

[1] «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.

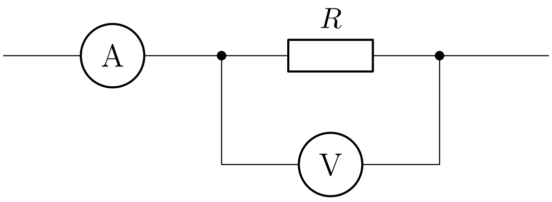

Рис. 1.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. Сопротивление R проводника измеряют с помощью амперметра и вольтметра по схеме, изображенной на рисунке 1. Сопротивление вольтметра $R_V \gg R$. Определите ошибку, которую допускают, вычисляя сопротивление проводника без учета тока, текущего через вольтметр.

Сопротивление проводника, рассчитанное по показаниям амперметра и вольтметра, без учета сопротивления вольтметра, равно

$$R' = \frac{U}{I},$$

где U — напряжение на вольтметре, I — ток, текущий через амперметр.

Истинное сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - U/R_V}.$$

Искомая ошибка

$$\Delta R = R - R' = \frac{U}{I - U/R_V} - \frac{U}{I} = \\ = \frac{U}{I}\left(\left(1 - \frac{U/R_V}{I}\right)^{-1} - 1\right).$$

Так как $R_V \gg R$, то имеем $U/R_V \ll \ll I$. Применяя теперь формулу (2), получаем

$$\Delta R = R - R' \approx \\ \approx \frac{U}{I}\left(1 + \frac{U/R_V}{I} - 1\right) \approx \frac{U^2}{I^2 R_V}.$$

Задача 2. На какую долю изменится сила тяжести при подъеме на высоту $h = 1$ км над поверхностью Земли? Радиус Земли считать равным $R = 6400$ км.

Сила тяжести тела массой m у поверхности Земли равна

$$F_0 = G\frac{mM}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

По мере удаления от поверхности Земли сила тяжести уменьшается, и на высоте h она равна

$$F_1 = G\frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Из выражений для F_0 и F_1 найдем

$$\frac{F_0 - F_1}{F_0} = 1 - \frac{F_1}{F_0} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} = \\ = 1 - \frac{1}{(1+h/R)^2} = 1 - \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}.$$

Поскольку $h \ll R$, то есть $h/R \ll 1$, используя формулу (2), получаем

$$\frac{F_0 - F_1}{F_0} \approx 1 - \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) = \\ = 2\frac{h}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 3. В теории относительности кинетическую энергию частицы $E_к$ подсчитывают по формуле $E_к = = E - E_0$, где E — энергия движущейся частицы, а E_0 — энергия покоящейся частицы. Покажите, что при скорости частицы $v \ll c$ (c — скорость света) кинетическая энергия приближенно равна $m_0 v^2/2$, где m_0 — масса покоящейся частицы.

Согласно теории относительности

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{и} \quad E_0 = m_0 c^2.$$

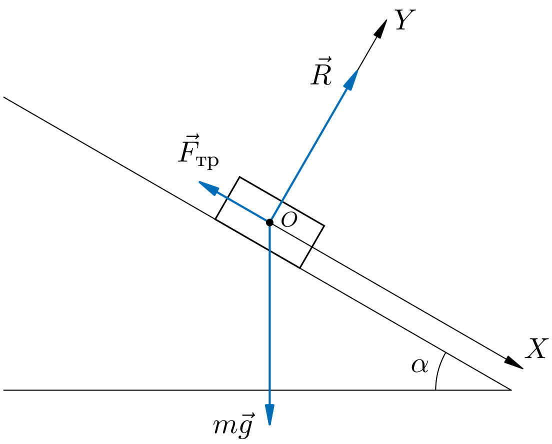

Рис. 2.

Отсюда

$$E_{\text{к}} = E - E_0 = \\ = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) = \\ = m_0c^2\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right).$$

Так как $v \ll c$, то есть $v/c \ll 1$, а значит, и $v^2/c^2 \ll 1$, применяя формулу (2), найдем

$$E_{\text{к}} \approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2}.$$

З а д а ч а 4. Тело соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 7°$ с горизонтом. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$.

На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная вверх по наклонной плоскости, и сила нормальной реакции $\vec{R}$, перпендикулярная к наклонной плоскости. Спроектируем обозначенные силы на оси координат OX и OY, как показано на рисунке 2, и запишем уравнения движения:

$$mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma,$$
$$R - mg\cos\alpha = 0.$$

Учитывая, что

$$F_{\text{тр}} = \mu R,$$

из уравнений движения найдем модуль ускорения тела:

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Так как угол $\alpha < 8°$, можно воспользоваться формулами (4) и (6) и считать, что $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$ (угол α должен быть выражен в радианах). Подставляя значения $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx 1{,}2 \cdot 10^{-1}$, получаем

$$a \approx g\left(1{,}2\cdot 10^{-1} - 3\cdot 10^{-2}\right) = \\ = 8{,}8 \cdot 10^{-1}\ \text{м}/\text{с}^2.$$

З а д а ч а 5. Сколько атомов распадается за время $t = 1$ с в одном грамме радия? Период полураспада радия $T = 1600$ лет. В грамме радия содержится $N_0 = 2{,}6 \cdot 10^{21}$ атомов.

Если число радиоактивных атомов в начальный момент времени равно N_0, то, согласно закону радиоактивного распада, по истечении времени t число N нераспавшихся атомов равно

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Отсюда можно найти искомое число n распавшихся атомов:

$$n = N_0 - N = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Поскольку $t/T \ll 1$, применив формулу (7), получим

$$n \approx N_0\left(1 - 1 + \frac{\lg 2}{0{,}43}\frac{t}{T}\right) \approx 3{,}7\cdot 10^{10}.$$

Заметим, что активность радиоактивного препарата, в котором за 1 с распадается $3{,}7 \cdot 10^{10}$ атомов, принимают за единицу активности и называют 1 кюри.

В заключение несколько слов о численных расчетах при решении задач.

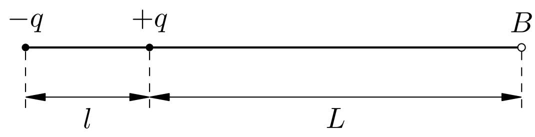

Рис. 3.

Записывая краткое условие какой-либо задачи, разумно все числовые значения представить в виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \leqslant a < 10$), причем с одинаковой степенью точности. В подавляющем большинстве случаев достаточна точность в две значащие цифры. Тогда получившийся результат следует округлить тоже до двух значащих цифр (смотри, например, решение задачи 4).

Упражнения

1. Подсчитайте максимальные значения a, при которых погрешности формул $(1+a)^3 \approx 1+3a$ и $\sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{1}{2}a$ не превышают 0,01. [$a \leqslant 0{,}057$; $a \leqslant 0{,}28$]

2. Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. На сколько отстанут часы с латунным маятником за сутки вследствие повышения температуры на $\Delta t = 10$ К? [$\Delta t \approx 8{,}6$ с]

3. Определите ускорение свободного падения на высоте 10 км от Земли, если у поверхности оно равно 981 см/с^2. Радиус Земли $R = 6400$ км. [$g' \approx 978$ см/с^2]

4. Определите напряженность поля системы точечных зарядов $+q$ и $-q$ в точке B (рис. 3), если $l \ll L$. $\left[E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{L^3}\right]$

5. Автомашина массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг трогается с места и идет в гору, наклон которой $\alpha = 0{,}02$. Пройдя расстояние $s = 100$ м, она развивает скорость $v = 32{,}4$ км/ч. Коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}05$. Определите среднюю мощность, развиваемую мотором автомашины при этом движении. $\left[N_{\text{ср}} \approx \frac{mv}{2}\left(\frac{v^2}{2s} + g\alpha + kg\right) \approx 10 \text{ кВт}\right]$