Задача Капицы о вращении цилиндра

И. И. Кравченко, 6 сентября, 2024.

В заметке попытаемся решить задачу П. Л. Капицы, связанную с проблемой объяснения магнитного поля Земли.

Определите величину индукции магнитного поля, возникающего при достаточно быстром вращении медного цилиндра. Покажите также несостоятельность объяснения этим эффектом земного магнетизма.

Ясно, что магнитное поле в проводящем незаряженном цилиндре обеспечивается токами его элементарных зарядов — свободных электронов и «неподвижных ядер». Направленные движения — токи — этих частиц обусловлены принудительным вращением цилиндра вокруг его оси. Таким образом, результирующее магнитное поле в цилиндре можно рассматривать как наложение магнитных полей токов электронов и ядер. Если эти ядра и свободные электроны будут «размазаны» по цилиндру равномерно, то магнитное поле в результате вращения будет отсутствовать (подумайте, почему?). Интуитивно понятно, что распределение отрицательных частиц-«переносчиков тока» в цилиндре должно отличаться от распределения положительных частиц-«переносчиков» в данном теле, чтобы дать магнитное поле, отличное от нуля.

Далее, ядра в проводнике перераспределяться не могут — они занимают свои «постоянные» места в теле цилиндра, так что любой малый элемент цилиндра обязан содержать одно и тоже количество этих самых ядер. Возможность передвижения по металлу имеется только у свободных электронов; посмотрим, что с ними происходит в процессе вращения цилиндра.

При вращении свободные электроны отбрасываются к краям цилиндра. Недостаток электронов вблизи оси цилиндра и избыток их на его краю приводят к тому, что вблизи оси образуется положительный объемный заряд, а на краю — отрицательный. Внутри цилиндра образуется электрическое поле, чем-то похожее на поле внутри цилиндрического конденсатора: линии этого поля имеют вид радиальных линий, идущих от оси к стенке цилиндра. Именно это поле обеспечивает круговое движение всех свободных электронов после установления равновесия.

Можно показать [1], что в установившемся режиме на свободный электрон, находящийся на расстоянии r от оси цилиндра, вращающегося с угловой скоростью ω, должно действовать поле

$$E = \frac{m\omega^2}{e} r, \tag{1}$$

где m и e — масса и заряд электрона ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Из формулы (1) видно, что электрическое поле внутри цилиндра неоднородно: величина поля E увеличивается с удалением от оси цилиндра пропорционально расстоянию r от оси.

Можно заметить, что закон изменения электрического поля с расстоянием от оси цилиндра внутри него эквивалентен закону изменения поля внутри равномерно заряженного по объёму V цилиндра, выражаемому так

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r, \tag{2}$$

где ρ — объемная плотность заряда внутри цилиндра, ε_0 — электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Учитывая сказанное и электронейтральность цилиндра, принимаем, что внутри цилиндра равномерно распределен по всему объему положительный заряд, равный по величине отрицательному заряду «лишних» электронов, «выброшенных» равномерно на поверхность цилиндра.

Итак, конфигурацию зарядов, образующих токи, считаем известной: внутри цилиндра длины l и радиуса R (пусть $l \gg R$) вокруг его оси течет ток I_1 избыточных ядер, по поверхности цилиндра вокруг оси — ток I_2 избыточных электронов. Ток I_2 аналогичен току в соленоиде длины l и радиуса R из тонкого провода; ток I_1 — как бы суперпозиция токов соленоидов длины l и радиусов от 0 до R из тонких проводов, вложенных друг в друга. (Краевыми эффектами в воображаемых соленоидах далее пренебрегаем; токи соленоидов — это полные токи через их боковые стороны l.)

Вычислим магнитные поля обозначенных токов.

Ток I_2 дает равномерное магнитное поле B_2 внутри цилиндра, которое вычислим по теореме о циркуляции (об этой теореме см. статью [2]):

$$B_2 l = \mu_0 I_2,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. Ток I_2 определим как отношение заряда q_2 поверхности к периоду T вращения цилиндра:

$$I_2 = \frac{q_2}{T} = q_2 \frac{\omega}{2\pi}.$$

Заряд q_2 поверхности по величине равен заряду $q_1 = \rho V$ внутри цилиндра; используя равенства правых частей формул (1) и (2), находим:

$$q_2 = \rho V = \frac{m\omega^2 \cdot 2\varepsilon_0}{e} \pi R^2 l.$$

Предыдущие три уравнения дают:

$$B_2 = \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot \varepsilon_0}{e} R^2.$$

Далее, ток I_1 дает в произвольной точке внутри цилиндра магнитное поле $B_1(r)$, зависящее от расстояния r до оси. Это связано с тем, что, например, в точке, отстоящей от оси на расстоянии a, существуют поля только от тех воображаемых соленоидов внутри цилиндра, в которые попала эта точка (то есть от соленоидов радиусов от a до R).

Выделим в цилиндре соленоид радиуса r $(r < R)$ и длины l с малой толщиной «провода» Δr и частичным током ΔI_1 на всей его длине. Этот соленоид создает внутри себя однородное поле ΔB_1 (используется теорема о циркуляции):

$$\Delta B_1 = \mu_0 \frac{\Delta I_1}{l}.$$

Ток ΔI_1 найдем как отношение заряда Δq_1 в «проводе» выделенного соленоида к периоду T:

$$\Delta I_1 = \frac{\Delta q_1}{T} = \Delta q_1 \frac{\omega}{2\pi}.$$

Заряд Δq_1 находится через объемную плотность заряда внутри цилиндра и объем $\Delta V = \Delta r l \cdot 2\pi r$ «провода»:

$$\Delta q_1 = \rho \Delta V = \frac{m\omega^2 \cdot 2\varepsilon_0}{e} \Delta r l \cdot 2\pi r.$$

Предыдущие три уравнения дают:

$$\Delta B_1 = \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot 2\varepsilon_0}{e} r \Delta r.$$

Поле $B_1(r)$ в точке на расстоянии r от оси, порождаемое соленоидами внутри цилиндра, охватывающими данную точку, найдем интегрированием:

$$B_1(r) = \int_r^R \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot 2\varepsilon_0}{e} r\, \Delta r = \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot \varepsilon_0}{e}(R^2 - r^2).$$

Магнитные поля B_1 и B_2 имеют противоположные направления. Результирующее магнитное поле в цилиндре оказывается равным:

$$B(r) = B_2 - B_1(r) = \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot \varepsilon_0}{e} r^2.$$

Максимум индукции в цилиндре (с заданной скоростью ω) приходится на «пристеночную область»:

$$B_{\max} = \mu_0 \frac{m\omega^3 \cdot \varepsilon_0}{e} R^2. \qquad (3)$$

По формуле (3) оценка максимальной индукции для цилиндра габаритов земного ядра ($R \sim 10^6$ м), вращающегося с угловой скоростью порядка земной ($\omega \sim 10^{-4}$ с$^{-1}$) дает 10^{-30} Тл — ничтожная величина по сравнению с индукцией на поверхности планеты, равной порядка 10^{-4} Тл. В этом то и несостоятельность объяснения земного магнетизма эффектом вращения металлического ядра Земли в рамках допущений в наших рассуждениях.

Литература

[1] В. Дроздов. «Механический генератор». В: *Квант* 5 (2008), с. 37—38.

[2] С. Гордюнин. «Идеальные проводники и кинетическая индуктивность». В: *Квант* 4 (1996), с. 40—41.