Задача Капицы о падении Луны

И. И. Кравченко, 18 октября, 2024.

В этой заметке покажем простое решение такой задачи П. Л. Капицы.

> Подсчитайте, на сколько изменится температура Земли, если на нее упадет Луна. Пусть теплоемкость Луны и Земли равна теплоемкости воды.

Перейдем в систему отсчета центра масс системы тел «Земля-Луна», в которой начальные скорости этих космических тел будем считать равными нулю. Вначале Земля массы M и Луна массы m находятся на расстоянии L (расстояние между их центрами) — значит, полная энергия системы равна потенциальной энергии их гравитационного взаимодействия:

$$-\frac{GMm}{L}, \qquad (1)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 — гравитационная постоянная.

В конце рассматриваемого процесса Земля и Луна «слиплись», так что энергия системы стала приближенно равна

$$-\frac{GMm}{R} + Q, \qquad (2)$$

где $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м — радиус Земли, Q — энергия системы, перешедшая в тепло. При написании этого выражения предполагалось, что Луна погрузилась в Землю приблизительно на половину радиуса Луны, и что энергии движения у «слипшихся» тел в системе их центра масс быть не может.)

Разумеется, энергии (1) и (2) должны быть равны:

$$-\frac{GMm}{L} = -\frac{GMm}{R} + Q. \qquad (3)$$

Тепло Q пошло на нагрев обоих тел:

$$Q = c(M+m)\Delta T,$$

где $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C) — удельная теплоемкость вещества тел, ΔT — изменение температуры тел. (Разницей начальных температур тел пренебрегаем.)

Подставляя далее выражение для Q в формулу (3) и выражая оттуда ΔT, получаем:

$$\Delta T = \frac{GMm}{c(M+m)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L} \right).$$

Массы тел и расстояние между ними вначале равны:

$$M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг},$$
$$m \approx \frac{1}{80} M,$$
$$L \approx 3{,}8 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Тогда вычисления в ранее полученной формуле для ΔT дают:

$$\Delta T \approx 170\,°\text{C}.$$

Интересно узнать время, за которое Луна упадет на Землю. При решении схожей задачи автор книги [1] заметил, что время падения любого спутника на его центральное притягивающее тело можно найти по такой формуле:

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{32}},$$

где T — период кругового обращения спутника вокруг его центрального притягивающего тела. (Эта формула выводится с помощью третьего закона Кеплера.)

Так как для Луны $T \approx 27{,}3$ суток, то время падения равно:

$$\tau \approx 5 \text{ суток}.$$

Литература

[1] Я. И. Перельман. *Занимательная астрономия*. Госфизматлит, 1958.