Задача Капицы о затухании колебаний

И. И. Кравченко, 1 ноября, 2024.

В этой заметке попробуем разобраться с довольно-таки непростой задачей П. Л. Капицы.

Определить затухание колебаний маятника в разреженном газе.

Условимся, что маятник представляет собой тонкую нить, верхний конец которой прикреплен к неподвижной опоре, а нижний конец — к тяжелому шарику. При этом масса шарика много больше массы нити, а размер шарика много меньше длины нити. Маятник способен совершать малые колебания в поле силы тяжести в слабо сопротивляющейся среде (в разреженном газе). Под затуханием маятника понимаем зависимость амплитуды его колебаний от времени.

Запишем дифференциальное уравнение для такого маятника:

$$-\omega^2 x - \frac{F_{\text{сопр}}}{m} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

где ω — собственная циклическая частота колебаний маятника, x — смещение шарика маятника от вертикальной оси, $F_{\text{сопр}}$ — сила сопротивления, действующая на шарик маятника, m — масса шарика.

Вязкостью среды пренебрежем, поэтому в нашем случае будем считать сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости обтекания воздухом шарика (скорость обтекания, как можно видеть, равна модулю скорости $\frac{dx}{dt}$ шарика при колебаниях). Тогда уравнение (1) переписывается так:

$$-\omega^2 x \mp \frac{\beta}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2)$$

где β — коэффициент сопротивления; знак «$-$» надлежит брать при $\frac{dx}{dt} > 0$, знак «$+$» — при $\frac{dx}{dt} < 0$ (так как сила сопротивления направлена против скорости тела).

Наше уравнение (2) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Для решения таких уравнений привлекают приближенные методы прикладной математики (см. книги [1, 2, 3]).

Интересно, однако, получить хотя бы качественное решение этой задачи более доступным читателю способом — например, через энергетические соображения в физике. Начнем наши рассуждения.

Пусть вначале маятник отведен от положения равновесия и из состояния покоя приходит в колебательное движение, которое затухает со временем. В момент времени $t = 0$ амплитуда колебаниий равна a_0; через n условных колебаний амплитуда будет равна a_n ($a_n < a_0$). Поскольку в n-ом колебании амплитуда пропорциональна максимальной потенциальной энергии шарика при его взаимодействии с Землей, то можно записать:

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{E_n}{E_0}, \qquad (3)$$

где E_n — потенциальная энергия шарика к моменту совершения n-ого колебания, E_0 — потенциальная энергия вначале.

Понятно, что величина E_n меньше величины E_0 за счет затухания; разность этих энергий равна работе A_n силы сопротивления, которую совершила последняя за n колебаний. Поэтому отношение (3) запишем так:

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{E_0 - A_n}{E_0}. \qquad (4)$$

Далее будем полагать, что выполняется условие $A_n \ll E_0$.

Сила сопротивления (зависящая от скорости шарика) будет зависеть от положения шарика при его колебаниях, тогда точное выражение для работы A_n нужно искать интегрированием. Учитывая, что амплитуда и максимальная приобретаемая скорость при колебаниях меняются незначительно, мы положим просто для оценки, что

$$A_n \sim \beta v_{1\,\max}^2 \cdot a_n n,$$

где $v_{1\,\max}$ — максимальная скорость в 1-ом колебании, n — число совершенных колебаний.

Теперь можно расписать величины в правой части формулы (4) (сама формула получается приближенной):

$$\frac{a_n}{a_0} \approx \frac{mgh_0 - \beta v_{1\,\max}^2 \cdot a_n n}{mgh_0}, \tag{5}$$

где g — ускорение свободного падения, h_0 — начальная высота, на которой находится шарик относительно его наинизшего возможного положения.

Скорость $v_{1\,\max}$ шарика, которая будет у него в его наинизшем положении на первом колебании, найдем из приближенной записи сохранения энергии для первого колебания при малом затухании

$$mgh_0 \approx \frac{mv_{1\,\max}^2}{2}$$

и подставим в формулу (5), что после упрощений дает следующее:

$$\frac{a_n}{a_0} \approx 1 - \frac{2\beta}{m} a_n n,$$

или

$$a_n \approx \frac{a_0}{1 + \dfrac{2\beta}{m} a_0 n}.$$

Если считать, что при малом затухании период условных колебаний примерно равен периоду T собственных колебаний маятника, то, разумеется, $n = \dfrac{t}{T} = \dfrac{t\omega}{2\pi}$, так что окончательно качественая зависимость амплитуды от времени выглядит так:

$$a_n \approx \frac{a_0}{1 + \dfrac{\beta\omega}{\pi m} a_0 t}.$$

Полученная зависимость очень хорошо согласуется с приближенным результатом, полученным математиками, который также показывает гиперболический спад амплитуды колебаний при колебаниях со слабым сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости.

Литература

[1] Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. *Введение в нелинейную механику*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

[2] Н. Н. Моисеев. *Асимптотические методы нелинейной механики*. Наука, 1969.

[3] А. Ю. Григорьев, К. А. Григорьев и Д. П. Малявко. *Колебания и виброактивность элементов машин: учебное пособие*. Университет ИТМО, 2016.