Задача Капицы о пролете цилиндра через соленоид

И. И. Кравченко, 25 августа, 2024.

В этой статье предлагаем читателю вместе с нами порассуждать над задачей академика Петра Леонидовича Капицы из сборника «Физические задачи» под его авторством [1]. Ее оригинальное условие выглядит так.

> Через соленоид, по которому течет ток, пролетает проводящий цилиндр. Определите те условия, при которых магнитное поле не позволит цилиндру пролететь через соленоид. Омическими сопротивлениями цилиндра и соленоида можно пренебречь.

Возможно усмотреть два существенно отличающихся способа интерпретации данного условия[1]:

- Цилиндр издалека подлетел к соленоиду и уже частично в нём находится («пролетает»), имея некоторую скорость движения.
- Цилиндру, уже целиком находящемуся внутри того же соленоида, придали толчком некоторую скорость движения (тоже «пролетает»).

Далее, имя П. Л. Капицы как ученого связано с фундаментальными открытиями в области физики низких температур[2] и объяснением сверхпроводимости. Петр Леонидович был блестящим экспериментатором и инженером, его работы вошли в историю развития физического эксперимента.

В этой связи упомянутые в условии задачи соленоид и цилиндр как нельзя кстати считать *сверхпроводящими*. А электрическое сопротивление любого сверхпроводника должно быть равным нулю ($R = 0$). Хотя рекомендация не учитывать сопротивление проводящих тел есть в самом условии, требование сверхпроводимости избавляет от необходимости учета тепловых потерь энергии в рассматриваемой системе. Однако, сверхпроводимость — это не просто идеальная проводимость; условие сверхпроводимости объекта предполагает, что *магнитный поток через любой замкнутый сверхпроводящий контур сохраняется неизменным* (это так называемый «закон сохранения магнитного потока через сверхпроводящий контур»). Сверхпроводимость может также «разрушаться» — более подробно об этом и не только см. в статье [4].

Наш сверхпроводящий цилиндр будем считать сделанным *не* из железа, а то с его (железа) магнитными свойствами нам разобраться будет далеко не просто. За магнитные свойства материала отвечает физическая величина, называемая магнитной проницаемостью и обозначаемая μ, — в нашем рассмотрении у цилиндра она будет равна примерно единице. (Вообще далее будем исходить из предположения, что в любой области пространства $\mu = 1$.)

Уточним еще начальные условия в рассматриваемой задаче, чтобы при ее решении получить вполне определенный ответ.

1. Считаем, что соленоид закреплен.
2. Пусть цилиндру, изначально покоившемуся относительно соленоида и целиком находящемуся внутри соленоида, придали толчком некоторую скорость $\vec{v}$ движения, направленную вдоль оси соленоида (не усложняем геометрию ситуации).
3. Соленоид и цилиндр в происходящем процессе в любой момент вре-

[1] Кстати, с точки зрения условия ближайшими аналогами будут задача 200 из книги [2] и задача 4.1.10 из книги [3].

[2] Нобелевская премия по физике 1978 года присуждена академику П. Л. Капице за фундаментальные изобретения и открытия в области физики низких температур.

мени расположены соосно (симметрия в помощь).

4. Соленоид и цилиндр считаем длинными: это означает, что длина соленоида (цилиндра) много больше диаметра его сечения. Обозначая длины соленоида и цилиндра через L и l, а диаметры их сечений соответственно через D и d, условия их «длинности» записываются соответственно так: $L \gg D$ и $l \gg d$. (В случае длинного соленоида (цилиндра) при протекании по нему «вращающегося» тока можно полагать, что магнитное поле, порожденное этим током, является однородным и сосредоточено целиком внутри этого соленоида (цилиндра).)
5. Размеры соленоида много больше соответствующих размеров цилиндра: $L \gg l$ и $D \gg d$ (в предельных случаях решение всегда значительно проще — здесь мы избавляемся от лишней математики: не зря же сборник, из которого взята предлагаемая задача, называется «Физические задачи»).
6. В соленоид и цилиндр, перед тем как их вложить друг в друга, «закачали» магнитные поля индукций $B_\text{с}$ и $B_\text{ц}$ соответственно (о «закачке» поля внутрь сверхпроводника см. в статье [4]).

Итак, соленоид и цилиндр представляют систему, которую будем считать *изолированной* (энергия не приходит в систему от других тел и не уходит из системы к каким-либо телам). *Под процессом в задаче понимаем движение цилиндра после сообщения ему скорости толчком вплоть до его остановки вне соленоида.*

Из условия рассматриваемой задачи можно заключить, что будет происходить торможение цилиндра. Поэтому условие «непролета» можно сформулировать в общих чертах так: *магнитное поле не позволит цилиндру пролететь через соленоид в том случае, если цилиндр будет иметь начальную скорость $\vec{v}$, недостаточную для его выхода из пространства внутри соленоида.* Сила, препятствующая движению цилиндра, действует на него, конечно, со стороны соленоида (точнее, магнитного поля соленоида, как мы понимаем). Решение задачи через законы Ньютона видится проблематичным — на этом пути мы можем встретить и требование неоднородности магнитного поля соленоида вблизи цилиндра, и необходимость вывода формулы для действующей на цилиндр магнитной силы, и интегрирование.

В подобного рода ситуациях нередко выручают энергетические соображения. Энергия нашей системы не может меняться (система изолирована), а состояния системы вначале и в конце нам известны. Применяя закон сохранения энергии, можно просто найти начальную скорость $\vec{v}_\text{min}$ цилиндра, удовлетворяющую его выходу из соленоида, а затем констатировать — при скоростях цилиндра, меньших $\vec{v}_\text{min}$, соленоид не позволит цилиндру пролететь через него. Так и сделаем.

Энергия системы в начале процесса складывается из кинетической энергии $E_{\text{к}0}$ цилиндра, энергии $W_{\text{с}0}$ магнитного поля внутри соленоида вне цилиндра и энергии $W_{\text{ц}0}$ магнитного поля цилиндра:

$$E_{\text{к}0} + W_{\text{с}0} + W_{\text{ц}0}. \tag{1}$$

Энергия системы в конце процесса состоит из энергии $W_\text{с}$ магнитного поля внутри соленоида, в котором уже нет цилиндра, и энергии $W_\text{ц}$ магнитного поля цилиндра, находящегося уже не внутри соленоида:

$$W_\text{с} + W_\text{ц}. \tag{2}$$

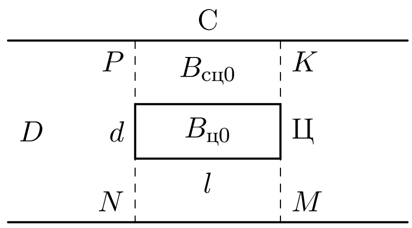

Рис. 1.

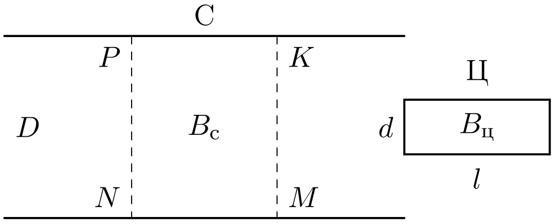

Рис. 2.

Закон сохранения энергии предполагает равенство энергий (1) и (2):

$$E_{к0} + W_{с0} + W_{ц0} = W_{с} + W_{ц}. \qquad (3)$$

На рисунке 1 показано схематически взаимное расположение соленоида С и цилиндра Ц в начале процесса, на рисунке 2 — их взаимное расположение в конце процесса. На этих рисунках обращаем внимание на область $PKMNP$ пространства внутри соленоида, заключенную внутри воображаемого цилиндра с боковой поверхностью, лежащей на внутренней поверхности соленоида, и основаниями PN и KM, проходящими через основания сверхпроводящего цилиндра. Из наших рисунков видно, что конфигурация системы внутри соленоида *вне* области $PKMNP$ в начале и в конце процесса одинакова: полагая магнитное поле внутри соленоида *вне* области $PKMNP$ в начале и в конце процесса неизменным, для удобства под энергиями $W_{с0}$ и $W_{с}$ в формуле (3) понимаем энергии поля внутри соленоида только в области $PKMNP$ *вне* цилиндра.

Энергия W однородного магнитного поля с индукцией B в объеме V может быть выражена через объемную плотность энергии w:

$$W = wV, \qquad (4)$$

где $w = \dfrac{B^2}{2\mu\mu_0}$ (μ_0 — магнитная постоянная).

Обозначив $k = \dfrac{1}{2\mu\mu_0}$, перепишем формулу (4) несколько иначе:

$$W = kB^2V. \qquad (5)$$

Формула (5) окажется для нас более удобной — ей и будем пользоваться как выражением для энергии однородного магнитного поля (коэффициент k в любой области пространства в нашей ситуации есть величина постоянная, что можно показать).

Для общности допустим, что магнитное поле *всегда* существует в любой области как внутри соленоида, так и внутри цилиндра; тогда, с учетом сказанного, формулы (5) и определения кинетической энергии, перепишем закон (3):

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} + kB_{сц0}^2V_{сц} + kB_{ц0}^2V_{ц} = \\ = kB_{с}^2V_{с} + kB_{ц}^2V_{ц}, \qquad (6)$$

где m — масса цилиндра, $B_{сц0}$ — индукция в области $PKMNP$ *между* соленоидом и цилиндром с объемом пространства $V_{сц} = \pi l\left(\dfrac{D^2}{4} - \dfrac{d^2}{4}\right)$ вначале, $B_{ц0}$ — индукция в цилиндре объемом $V_{ц} = \pi\dfrac{d^2}{4}l$ вначале, $B_{с}$ — индукция в области $PKMNP$ с объемом $V_{с} = \pi\dfrac{D^2}{4}l$ в конце, $B_{ц}$ — индукция в цилиндре в конце.

Далее, сверхпроводящее состояние соленоида и цилиндра требует сохранения магнитного потока в них через любой контур по их поверхности. Обозначая магнитные потоки через произвольный контур по соленоду и цилиндру $\Phi_с$ и $\Phi_ц$ соответственно, имеем:

$$\Phi_с = \text{const},$$
$$\Phi_ц = \text{const}.$$

Магнитный поток Φ через *плоский* контур в случае *однородного* поля с индукцией $\vec{B}$ по определению равен $\Phi = BS\cos\alpha$, где S — площадь контура, α — угол между нормалью к плоскости контура и вектором $\vec{B}$. Если в разных частях такого контура индукция имеет различную величину, то для нахождения магнитного потока через контур можно рассчитать сначала «частичные» потоки через каждую из таких частей, а потом сложить эти «частичные» потоки.

Выберем в области $PKMNP$ произвольный плоский контур, проходящий по поверхности соленоида (пусть плоскость контура перпендикулярна оси соленоида), и запишем равенство магнитных потоков (с учетом определения) в начале и в конце процесса через этот контур:

$$B_{сц0}\,(S - s) + B_{ц0}s = B_с S, \tag{7}$$

где $S = \pi\dfrac{D^2}{4}$ и $s = \pi\dfrac{d^2}{4}$ — площади торцов соленоида и цилиндра. В левой части этого уравнения первое слагаемое — «частичный» поток с индукцией $B_{сц0}$, второе слагаемое — «частичный» поток с индукцией $B_{ц0}$.

Теперь запишем равенство магнитных потоков в начале и в конце процесса через произвольно выбранный плоский контур, проходящий по поверхности цилиндра (пусть плоскость этого контура также перпендикулярна оси цилиндра):

$$B_{ц0}s = B_ц s. \tag{8}$$

Учитывая принятые обозначения, а также условие $D \gg d$ и то, что масса цилиндра $m = \rho\pi\dfrac{d^2}{4}l$ (где ρ — массовая плотность цилиндра), совместное решение уравнений (6), (7) и (8) позволяет найти скорость $v_{\min}$ через «закачанные» индукции $B_с$ и $B_ц$ соленоида и цилиндра соответственно:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2B_с B_ц - B_с^2}{\rho\mu\mu_0}}.$$

Значит, цилиндр не пролетит через соленоид при скоростях, удовлетворяющих неравенству:

$$v < \sqrt{\frac{2B_с B_ц - B_с^2}{\rho\mu\mu_0}}. \tag{9}$$

Полученый результат корректен с точки зрения теории размерностей.

В заключение рассмотрим несколько частных случаев.

- Если индукции $B_с$ и $B_ц$ равны друг другу:

  $$B_с = B_ц = B,$$

  то условие (9) упрощается:

  $$v < \sqrt{\frac{B^2}{\rho\mu\mu_0}}.$$

  Такой результат можно получить из чисто *энергетических* соображений. Начальная кинетическая энергия цилиндра должна быть меньше увеличения энергии магнитного поля во всей системе, когда цилиндр «вышел» из соленоида: $\dfrac{mv^2}{2} < \dfrac{B^2}{2\mu\mu_0}V_ц$ (преобразование этого соотношения показывает, что размеры цилиндра здесь не играют роли).

- Если поля в цилиндре нет:

  $$B_ц = 0,$$

то в условии (9) под корнем получаем *отрицательную* величину, что можно интерпретировать как невозможность «застревания» цилиндра: какая бы ни была скорость у цилиндра вначале, он всегда выталкивается из соленоида.

- Если поля нет в соленоиде:

$$B_{\text{с}} = 0,$$

то в условии (9) под корнем получается *ноль*: наша система не препятствует и не способствует вылету цилиндра (система энергетически в безразличном равновесии).

Вообще возможность «застревания» цилиндра требует, чтобы подкоренное выражение неравенства (9) было положительным; тогда имеем:

$$2B_{\text{с}}B_{\text{ц}} - B_{\text{с}}^2 > 0,$$

откуда получаем допустимые соотношения между величинами индукций соленоида и цилиндра:

$$\frac{B_{\text{с}}}{B_{\text{ц}}} < 2.$$

Литература

[1] Петр Леонидович Капица. *Физические задачи*. Знание, 1966.

[2] А. П. Савин и др. *Физико-математические олимпиады*. Знание, 1977.

[3] А. Н. Паршаков. *Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 2: Электромагнетизм*. ПГТУ, 2010.

[4] Ю. В. Шаврин. «Закон сохранения магнитного потока». В: *Квант* 6 (1970), с. 11—16.