super.antig@yandex.ru Кравченко Игорь Игоревич +7 901 014 49 10

Задача Капицы о шаре над жидкостью

И. И. Кравченко, 22 августа, 2024.

В этой заметке попробуем «угадать» ответ к одной из знаменитых задач П. Л. Капицы. Речь идет о восьмой задаче из его рукописи, датируемой 8 февраля 1948 г. Вот ее условие.

> Определите искажение поверхности жидкости, производимой силой тяготения шара. Разобрать возможность экспериментального наблюдения этого эффекта для определения постоянной тяготения. (*Опыт Гершуна*)

Пусть шар находится над водой. Интуитивно понятно, что под шаром должен образоваться горб воды. Попытаемся оценить высоту этого горба с помощью метода размерностей.

Ясно, что высота y горба зависит от гравитационной постоянной G, массы m шара, высоты h шара относительно неискаженной поверхности, ускорения g свободного падения.

Зависимость полагаем в виде:

$$y \sim G^{\alpha} m^{\beta} h^{\gamma} g^{\varphi}. \qquad (1)$$

Размерности величин: $[y] = \text{м}$, $[G] = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$, $[m] = \text{кг}$, $[h] = \text{м}$, $[g] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Размерности правых и левых частей формулы (1) должны быть одинаковы, то есть

$$\text{м} = \text{кг}^{-\alpha} \cdot \text{м}^{3\alpha} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^{\beta} \cdot \text{м}^{\gamma} \cdot \text{м}^{\varphi} \cdot \text{с}^{-2\varphi} = \text{кг}^{-\alpha+\beta} \cdot \text{м}^{3\alpha+\gamma+\varphi} \cdot \text{с}^{-2\alpha-2\varphi}.$$

Килограммов быть не должно:

$$-\alpha + \beta = 0.$$

Секунд тоже:

$$-2\alpha - 2\varphi = 0.$$

Метры нужны в первой степени:

$$3\alpha + \gamma + \varphi = 1.$$

Система из трех предыдущих уравнений не имеет единственное решение[1].

Это значит, что показатели степени $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ формально могут быть любыми (хотя и зависящими друг от друга).

Тем не менее, обратимся к физической стороне ситуации. Понятно, что высота y горба должна увеличиваться с «ростом» G и m, так как G являестя как бы мировой мерой способности тел притягивать другие тела, а m — это собственная мера способности шара притягивать другие тела. В то же время следует ожидать убыль y с «ростом» h и g.

Тогда проще всего зависимость y от G, m, h, g выглядит так:

$$y \sim \frac{Gm}{hg},$$

и проверка размерностей левой и правой частей этого соотношения говорит о правильности написанной связи!

Хотя искомая связь может выглядеть сложнее (что стало видно при попытке решения методом размерностей), мы доверимся принципу простоты[2] в физике и оставим дальнейшие рассуждения над задачей читателю. (Аналитическое решение задачи можно посмотреть в книге «Физика: от оценок к исследованию» авторов Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Савин А. В., Станкевич Н. В.)

[1] Не выполняется так называемое правило $N - K = 1$ (см. статью Ю. Брук и А. Стасенко «Метод размерностей помогает решать задачи» в журнале «Квант» №6 за 1981 год).

[2] Процитируем Р. Фейнмана: «Ваша догадка, в сущности, состоит в том, что нечто — очень простое. Если вы не видите сразу же, что это неверно, и если так оказывается проще, чем раньше, — значит, это верно... Истина всегда оказывается проще, чем можно было бы предположить.» (Фейнман Р. «Характер физических законов».)