Задача Капицы о вакууме в сосуде

И. И. Кравченко, 9 ноября, 2024.

В этой заметке покажем оценочное решение задачи П. Л. Капицы.

В сосуде, в котором требуется поддерживать вакуум 10^{-5} мм ртутного столба, имеется маленькое отверстие диаметром 10^{-2} мм. Определить размер трубки для откачки и мощность вакуумного насоса.

Для поддержания заданного вакуума в сосуде нужно, чтобы масса $m_{1\tau}$ газа, поступающего в единицу времени внутрь сосуда из-за натекания [1, 2] через отверстие, была равна массе $m_{2\tau}$ газа, удаляемого из сосуда насосом:

$$m_{1\tau} = m_{2\tau}. \tag{1}$$

Пусть снаружи сосуда воздух при нормальных давлении $P_\text{A} = 10^5$ Па и температуре $T_\text{A} = 273$ К. Поскольку давление P в сосуде много меньше давления окружающего его воздуха, то натекание обусловлено только «залетом» частиц воздуха в сосуд через отверстие за счет теплового движения самих частиц воздуха. Тогда величина $m_{1\tau}$ зависит от плотности ρ_A атмосферы, тепловой скорости v_A ее частиц и площади s отверстия; соображения размерности дают следующую зависимость:

$$m_{1\tau} \sim \rho_\text{A} s v_\text{A}. \tag{2}$$

Давление разрежения, создаваемого в камере насоса, примем много меньшим давления внутри сосуда. Тогда для величины $m_{2\tau}$ можно записать по аналогии с предыдущими рассуждениями:

$$m_{2\tau} \sim \rho S v, \tag{3}$$

где ρ — плотность воздуха в сосуде, S — площадь сечения трубки откачки, v — скорость частиц воздуха в сосуде.

Считая температуру T внутри сосуда, равной T_A, имеем $v_\text{A} = v$. В таком случае из уравнения состояния газа имеем также связь плотностей: $\rho_\text{A} = \dfrac{P_\text{A}}{P}\rho$.

Теперь, приравнивая правые части формул (2) и (3), получаем:

$$\frac{S}{s} = \frac{\rho_\text{A}}{\rho} = \frac{P_\text{A}}{P}. \tag{4}$$

Расчеты по этой формуле дают для диаметра трубки откачивания величину приблизительно $D \approx 85$ мм. (Учтено, что $s = \pi d^2/4$ и $S = \pi D^2/4$.)

Найдем также минимальную теоретическую мощность N насоса в режиме поддержания вакуума. Из физических соображений эта мощность зависит от его минимально допустимой производительности V_τ (объема газа, который он удаляет в единицу времени из сосуда) и разности давлений $\Delta P = P_\text{A} - P$. Размерность величины N из теории размерностей дает комбинация $V_\tau \Delta P$, так что:

$$N \sim V_\tau \Delta P. \tag{5}$$

Величину V_τ можно найти из равенства (1), если, с учетом (2), его переписать по порядку величины так:

$$\rho_\text{A} s v_\text{A} \sim \frac{P V_\tau M}{RT}, \tag{6}$$

где M — молярная масса воздуха. Правая часть этого соотношения представляет собой необходимую величину удаляемой в единицу времени массы $m_{2\tau}$, выраженной из уравнения состояния газа в сосуде (ср. задачу 2.62 из сборника [3]).

Учитывая, что

$$\rho_\text{A} = \frac{P_\text{A} M}{R T_\text{A}},$$
$$T = T_\text{A},$$
$$v_\text{A} = \sqrt{\frac{3RT_\text{A}}{M}},$$

из формулы (6) имеем:

$$V_\tau \sim \frac{P_\mathrm{A} s}{P}\sqrt{\frac{3RT_\mathrm{A}}{M}}. \qquad (7)$$

Итак, формула (5) мощности переписывается:

$$N \sim \frac{\Delta P P_\mathrm{A} s}{P}\sqrt{\frac{3RT_\mathrm{A}}{M}} \qquad (8)$$

и с учетом принятых условий дает оценку $N \sim 400$ Вт.

Конечно, все сказанное относится к очень идеализированной ситуации вакуумирования. Мы не учитывали массы движущихся частей насоса, трение в системе, вязкость воздуха и многие другие технические моменты, которые «всплывают» на практике.

Литература

[1] Л. Н. Розанов. *Вакуумная техника.* Высшая школа, 2007.

[2] Дж. Уэстон. *Техника сверхвысокого вакуума.* Мир, 1988.

[3] Л. П. Баканина и др. *Сборник задач по физике: учебное пособие.* Наука, 1990.